第 39 卷 第 6 期
2022 年 12 月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 39 No. 6
Dec. 2022

文章编号:1000-4939(2022)06-1014-08

一种考虑时变温度场影响的非线性颤振计算方法

沈恩楠,吴江鹏,曲林锋,王赫喆,赵飞宇

(中国航空工业集团公司沈阳飞机设计研究所,110035 沈阳)

摘 要:基于 CFD 的颤振计算时域方法通常在模态空间内耦合求解 Euler/N-S 方程和结构运动方程,局限于线性结构。为了研究温度等非线性因素对颤振特性的影响,本研究将 Nastran 软件的线性和非线性结构运动方程逐步积分求解的 CSD 方法与非定常 CFD 求解器时域耦合,并利用径向基函数法进行流固耦合界面数据传递,构建出结构线性和非线性的颤振计算方法。采用所建立的结构线性和非线性颤振计算方法对一平板机翼进行分析,验证了方法的可靠性。最后建立了能够模拟温度实时变化过程的颤振计算方法,研究了温度对材料的影响引起的非线性颤振特性的变化。

关键词:颤振;非线性;时变温度场;耦合

中图分类号:V215.3+4 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.002

Nonlinear flutter calculation method considering the influence of time-varying temperature field

SHEN Ennan, WU Jiangpeng, QU Linfeng, WANG Hezhe, ZHAO Feiyu

(Shenyang Aircraft Design and Research Institute of AVIC, 110035 Shenyang, China)

Abstract: The time domain method of flutter calculation based on CFD usually solves Euler/N-S equations and structural motion equations in modal space, which is limited to linear structures. In order to study the influence of temperature and other nonlinear factors on flutter characteristics, in this paper, the CSD method of solving the linear and nonlinear structural motion equations of Nastran software is coupled with the unsteady CFD solver in time domain. The radial basis function method is used to transmit the fluid structure coupling interface data. The structural linear and nonlinear flutter calculation methods are constructed. The linear and nonlinear flutter calculation methods are used to analyze a flat swept wing. The results verify the reliability of the methods. Finally, the flutter calculation method which can simulate the real-time temperature change process is established, and the non-linear flutter characteristic change caused by the influence of temperature on the material is studied.

Key words: flutter; nonlinearity; time-varying temperature field; coupling

颤振预测是飞行器设计中必不可少的一项重要环节。国外在颤振数值计算方面已经做了大量研究[1-3],现阶段主要研究特点是采用计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)和计算结构动力学(computational structural dynamics, CSD)最新成就耦合求解非线性尤其是气动非线性颤振问题。

收稿日期:2021-02-04 修回日期:2022-06-03
基金项目:国家重点研发计划资助项目(No. 2017YFF0107600;2017YFF0107603)
作者简介:沈恩楠。E-mail:709144198@qq.com
引用格式:沈恩楠,吴江鹏,曲林锋,等.一种考虑时变温度场影响的非线性颤振计算方法[J].应用力学学报,2022,39(6):1014-1021.
SHEN Ennan, WU Jiangpeng, QU Linfeng, et al. Nonlinear flutter calculation method considering the influence of time-varying temperature field [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6):1014-1021.

国内近些年来发展的 CFD/CSD 耦合计算方法中,多数将气动力模型或者结构模型进行线化处理。刘南等[4]基于频域颤振分析 V-g 方法提出了一种快速确定参数变化影响的高效颤振预测分析方法,并应用于跨声速颤振边界分析。安效民等[5]对二阶时间精度的 CFD/CSD 耦合算法进行了研究,在保证计算精度的基础上明显提高了计算效率,并保持了松耦合方法模块化的特点。叶正寅等[6]利用双时间推进方法求解三维非定常 N-S 方程,得到与任意非定常运动对应的非线性气动力,采用模态叠加法描述结构振动变形,计算了风洞试验模型的颤振特性。陆志良等[7]采用弹性变形技术生成块结构动态网格,CFD 计算非定常气动力,模态叠加法描述结构振动变形,并提出变质量、变刚度的方法计算飞机跨声速颤振特性。张苏华等[8]采用 CFD/CSD 耦合方法计算了 AGARD 445.6 机翼的跨声速颤振特性,利用 ANSYS 软件的 MFX 多场耦合求解器求解非定常气动力,采用直接数值积分法获得结构响应。仲继泽等[9]基于弹性体动网格技术,发展了一种用于机翼流场网格变形的降阶算法。将流场网格所包围的空间区域视为虚拟弹性体。在保证计算精度的情况下大大节省了计算时间。侯良学等[10]采用 CFD/CSD 耦合的非线性方法对跨声速颤振边界进行预测,预测结果与试验结果吻合较好。钮耀斌等[11]引入微分求积法,分析高速小展弦比机翼的气动弹性问题,将小展弦比机翼简化为悬臂板,根据频率重合理论对颤振问题进行求解。夏健等[12]采用流固耦合方法对跨声速颤振问题进行了数值模拟,在每一个物理时间步都采用聚合多重网格方法,交替迭代求解流体和结构控制方程。

综上所述,目前大部分颤振计算方法都是针对线性结构,通过模态叠加法来描述结构振动变形,无法考虑非线性结构问题。本研究在线性和非线性结构瞬态响应的逐步积分计算方法的基础上,建立了结构线性和非线性的 CFD/CSD 时域耦合的颤振计算方法,并实现了能够考虑温度实时变化过程的颤振特性分析。

1　结构瞬态响应逐步积分求解方法

1.1　线性结构瞬态响应

不计结构阻尼,在外部激励的作用下,结构运动方程形式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{P}(t) \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{M}$ 是质量矩阵;$\boldsymbol{K}$ 是刚度矩阵;$\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$ 是加速度向量;$\boldsymbol{u}(t)$ 是位移向量;$\boldsymbol{P}(t)$ 是载荷向量。

对于线性结构分析,质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 保持不变。加速度的差分离散表达式为

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^{n}=\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-2\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{u}^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{2}$$

其中:上标 n 代表时间层;Δt 是时间步长。

将式(2)代入式(1)可得

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-2\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{u}^{n-1}}{\Delta t^2}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}^{n}=\boldsymbol{P}^{n} \tag{3}$$

在 Nastran 软件中,外部激励 $\boldsymbol{P}$ 采用相邻 3 个时间点激励的平均值表示,弹性力也应采用相邻 3 个时间点的平均值。最后整理为

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{u}^{n-1} \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}+\frac{1}{3}\boldsymbol{K},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{3}(\boldsymbol{P}^{n+1}+\boldsymbol{P}^{n}+\boldsymbol{P}^{n-1}),$$

$$\boldsymbol{A}_3=\frac{2\boldsymbol{M}}{(\Delta t)^2}-\frac{\boldsymbol{K}}{3},\boldsymbol{A}_4=-\frac{\boldsymbol{M}}{(\Delta t)^2}-\frac{\boldsymbol{K}}{3} \tag{5}$$

该方法类似于 Newmark-Beta 方法。式(4)左侧只包含 $\boldsymbol{u}^{n+1}$,右侧只包含 $\boldsymbol{u}^{n}$ 和$\boldsymbol{u}^{n-1}$,通过迭代方法可以求得 $\boldsymbol{u}^{n+1}$。

在每一个物理时间步,通过修改 bdf 文件的载荷工况卡片可以用于模拟时变载荷。对于线性结构的具体计算流程如下。

1)利用 Patran 建立有限元模型,生成. bdf 文件。

2)将随时间变化的载荷离散成若干物理时间步,调用 Nastran 软件计算在第一个物理时间步载荷作用下的结构响应。

3)读取结构响应,生成新的 bdf 文件,更改载荷和边界条件。

4)调用 Nastran 软件计算结构在新的物理时间步内的结构响应。

5)重复第 3)~4)步,直至完成全部物理时间步的迭代步数。

1.2　非线性结构瞬态响应

对于非线性结构,在每一个物理时间步内,质量矩阵和刚度矩阵会发生变化,需要将每个物理时间步内的载荷向量分解为若干段载荷增量,逐步加载

至结构的同时对结构的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 进行更新。具体步骤如下:

1)利用 Patran 建立有限元模型,生成. bdf 文件。

2)将随时间变化的载荷离散成若干物理时间步,调用 Nastran 软件计算在第一个物理时间步载荷作用下的结构响应。此时载荷施加过程按照如下步骤进行。

(a)先施加总载荷的一部分载荷。

(b)提取刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$。

(c)求解刚度矩阵和残值向量,判断是否收敛。

(d)如果收敛则得到结构的位移和应力;如果不收敛,则重复(b)~(c)步,直至收敛。

(e)继续增加载荷增量,重复(a)~(d)步,直至100%载荷加载。

3)读取结构响应,生成新的. bdf 文件,更改载荷和边界条件。

4)调用 Nastran 软件,重复第 2)步里的步骤,计算结构在新的物理时间步内的结构响应。

5)重复第 3)~4)步,直至完成全部物理时间步的迭代步数。

2 流-固耦合边界信息传递

大多数情况下,流场与结构计算的空间离散方法有很大区别。在机翼或者舵面的前缘、后缘和翼梢等外形曲率较大的地方,流场网格分布比结构单元更加密集,需要在边界处通过插值方法传递气动载荷和结构表面变形。采用径向基函数法(RBFs)实现结构表面变形的传递过程,将结构单元点的位移插值到流场物面网格点。RBFs 构造的插值函数是一系列基函数的叠加,即

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b\|) + \psi(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

其中:$f(\boldsymbol{x})$为构造的插值函数;n 为控制点个数;a_i为通过控制点函数及附件条件获得的系数。$\boldsymbol{x}_b = [x_{bi}, y_{bi}, z_{bi}]$为已知位移的控制点的坐标。$\varphi$ 为基于欧式范数的基函数,本研究采用$\|\boldsymbol{x}\|$作为基函数。$\psi(\boldsymbol{x}) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$ 为线性多项式。其中a_i,b_0, b_1, b_2, b_3为通过控制点变形及附加条件获得的系数。在计算过程中,虽然结构表面点的位移在时刻发生变化,但是与气动网格物面点之间的插值关系是保持不变的,这样在计算开始前就可以确定并储存插值函数。在后续的计算中,结构发生任意变形都可以通过储存的插值函数快速计算出流场物面网格的变形。由于流场网格比结构单元分布更密集,因此采用最近距离法搜索流场物面边界气动载荷到结构单元表面之间的对应关系。

3 CFD/CSD 耦合的颤振计算

对于飞行器颤振计算,外部激励为气动表面压强。结构在气动载荷的作用下产生变形,反过来对表面气动载荷分布产生影响。因此,该问题中的激励 $\boldsymbol{P}$ 是随时间变化的,时域颤振计算在时域内耦合求解流场控制方程和结构运动方程,根据结构响应时间历程判断是否颤振。本研究建立了如下基于CFD/CSD 时域耦合的颤振计算方法。

在气动力的作用下,结构单元点在每个物理时间(耦合时间 Δt_c)内都会产生位移、速度和加速度,并对下一个时间步的结构运动方程求解产生影响,如图 1 所示,在每一个物理时间步(t_{cn})求解结构运动方程时,都要将前一步的计算结果作为初始条件。在求解线性或非线性结构运动方程的基础上,耦合CFD 方法求解流场控制方程,时域内迭代计算得到结构瞬态响应,进而分析获得颤振特性。

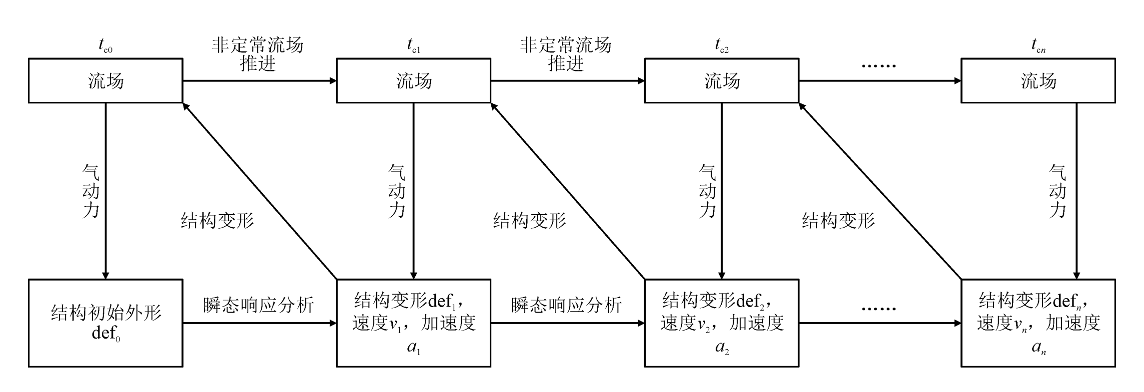


图 1 CFD/CSD 时域耦合颤振计算流程

Fig. 1 Process of CFD/CSD time domain coupled flutter calculation

4　算例与分析

首先以平板机翼颤振分析为例,验证本研究所建立的 CFD/CSD 时域耦合的颤振计算方法的正确性,然后通过改变结构温度场实现时域温度变化的非线性颤振计算。

4.1　平板机翼模型颤振分析

平板机翼[13]弹性模量为 7.1×10^{10} Pa,泊松比 0.3,密度为 2 700 kg/m^3。翼根固支,采用实体单元建模,展向划分 25 个单元,弦向划分 16 个单元。前后缘、翼梢以及翼根处网格较密,增长比为 1.2。厚度方向划分 2 个单元。前后缘为三棱柱 Wedge6 单元,中间部分采用六面体 Hex8 单元。有限元模型如图 2 所示。

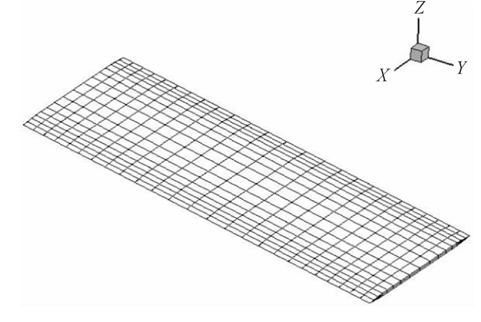


图 2　平板机翼有限元模型

Fig. 2　Finite element model of plate swept wing

首先验证本研究所建实体模型与文献模型的结构振动特性是否一致。利用 Nastran 软件分析模态,前四阶模态的振型与频率,如图 3 所示。通过对比(表 1)可以看出本研究所建立模型各阶模态的频率与文献[13]基本吻合。

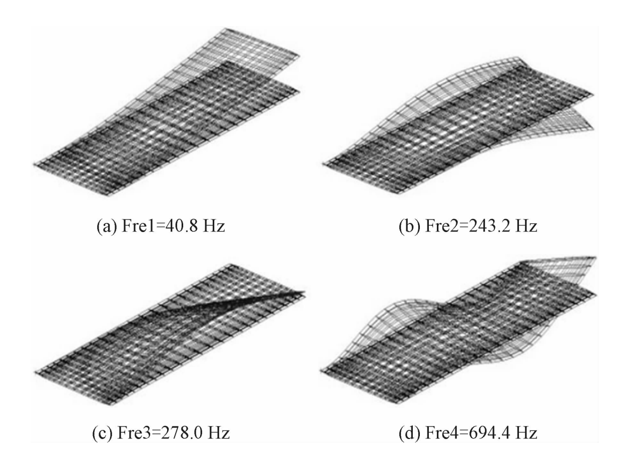


图 3　平板机翼前四阶模态

Fig. 3　First four modes of the wing

表 1　所建立实体模型与文献[13]频率对比

Tab. 1　Comparison between the presented model and Ref. [13]

阶数	本研究模型/Hz	文献模型/Hz
一	40.8	39.1
二	243.2	237.1
三	278.0	270.5
四	694.4	704.7

基于偶极子格网法建立非定常气动力模型,气动网格展向和弦向分别均匀划分 6 个和 4 个单元,共 24 个面元。采用 p-k 法计算模型的颤振速度,空气密度值为 1.226 kg/m^3,马赫数为 0.45。图 4 所示为 V-g 曲线,机翼的颤振速度为 153.683 m/s,此时得到的颤振速度是在该来流条件下的匹配颤振速度,满足 $V_{\mathrm{f}}=M_\infty a_\infty$。与文献[13]计算结果(颤振速度为 149.1 m/s)吻合较好,该有限元模型能够用于颤振计算方法验证。

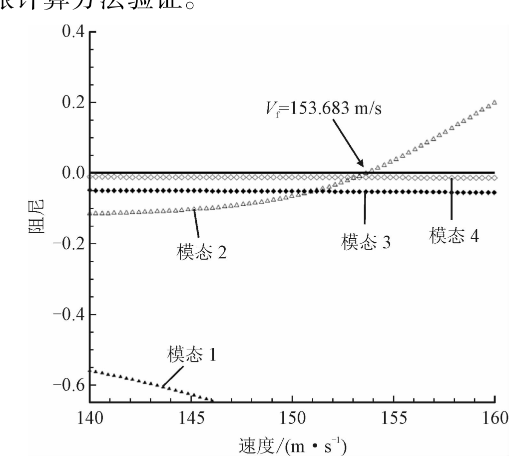


图 4　p-k 法计算结果绘制 V-g 曲线

Fig. 4　V-g diagram from the p-k method

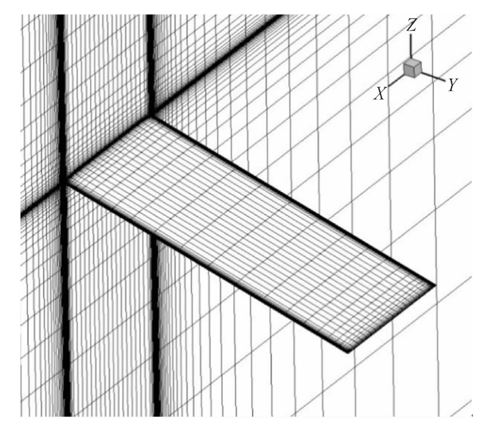


图 5　平板机翼流场网格

Fig. 5　Conputation mesh of the wing

采用结构线性的颤振计算方法分别计算平板机

翼在来流马赫数为 0.44、0.445 和 0.45 的情况。流场网格总数 153 万,对称面及机翼表面网格如图 5 所示。监测翼梢前后缘顶点的 Z 方向位移。当来流马赫数为 0.44 时,监测点位移曲线如图 6(a)所示;随着时间推进,机翼振动幅度逐渐减小,监测点位移曲线收敛到静平衡位置;当来流马赫数为 0.445 时,监测点位移曲线如图 6(b)所示,收敛速度相比于马赫数为 0.44 时的情况减缓许多,接近颤振临界状态;当来流马赫数为 0.45 时,监测点位移时间曲线如图 6(c)所示,结构振动幅度逐渐增加,结构发生颤振。可以认为采用结构线性的颤振计算方法得到的颤振临界马赫数约为 0.445,即颤振速度为 151.3 m/s。

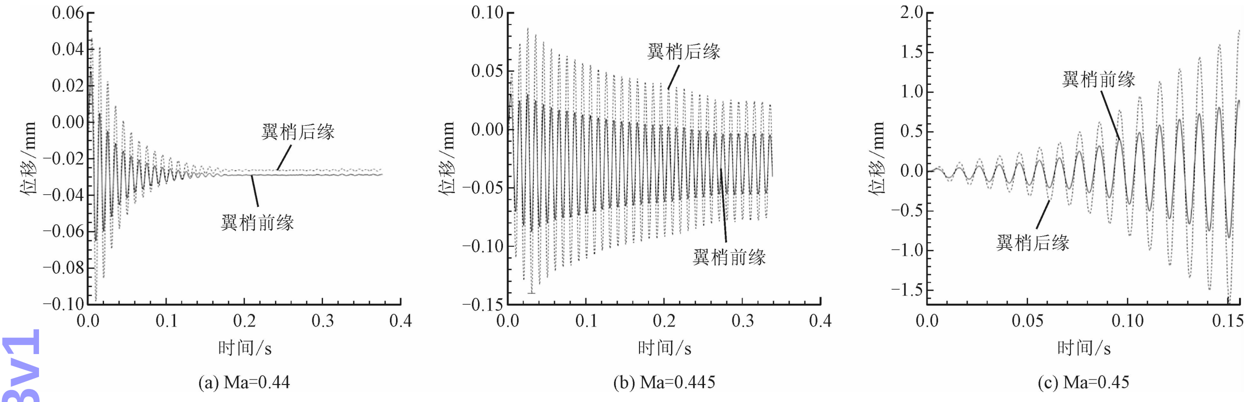


图 6 结构线性的颤振计算方法得到的翼梢前后缘 Z 方向位移曲线

Fig. 6 Z-direction displacement of detection point by CFD/linear CSD coupling analysis

图 7 为结构非线性的颤振计算方法得到的来流马赫数分别为 0.44、0.45、0.455 和 0.46 的翼梢后缘位移随时间响应曲线,其中图 7(a)与图 7(b)包含了线性方法的计算结果。当来流马赫数为 0.44 时,非线性方法监测点位移时间响应曲线收敛速度明显快于线性方法;当来流马赫数为 0.45 时,线性方法监测点曲线发散,而非线性方法曲线仍然处于收敛状态;当来流马赫数为 0.455 时,非线性方法监测点曲线已有发散趋势,颤振临界马赫数在 0.45 ~ 0.455 之间;当来流马赫数为 0.46 时,非线性方法监测点曲线已经发散,结构发生颤振。可以认为非线性方法计算得到颤振临界马赫数为 0.453 左右。两种方法计算结果基本一致,其中的差异主要来自于:在非线性方法计算过程中,载荷被分段加载,同时刚度矩阵在时刻更新,这种分段积分的形式与线性方法计算得到的结果存在一定差异。由于平板机翼颤振在微幅振动条件下不存在明显的非线性环节,这种差异并不明显,所得结论与物理客观相符。

4.2 考虑时变温度影响的非线性颤振分析

当机翼结构温度升高时,材料的非线性就会体现出来。主要表现为材料的弹性模量以及线膨胀系数会随温度的变化发生改变,结构受热不均匀导致各单元膨胀程度不同,引发结构内部的预拉或预压应力,使结构发生软化或硬化。

结构线性的颤振计算方法得到的平板机翼海平面颤振临界速度为 151.3 m/s(0.445 Ma)。当来流马赫数为 0.4 时,结构不会发生颤振,此时的来流速压为颤振临界速压的 0.808 倍。温度变化可以改变材料的弹性模量,进而改变结构的动力学特性,颤振临界速压也会发生变化。所采用的材料属性如表 2 所示。分别计算结构温度为 300 K、320 K 和从 300 K 开始以 200 K/s 的速度均匀增加的情况。如图 8 所示,当温度为 300 K 时,监测点位移曲线处于收敛状态;当温度为 320 K 时,位移曲线处于发散状态,结构发生颤振;变温条件下,当温度较低时,位移曲线处于收敛状态;当温度升高至 312 K(0.06 s) ~314 K(0.07 s)之间,位移曲线近似为等幅振荡;当温度升高至约为 316 K(0.08 s)时,位移曲线振幅明显增加,结构发生颤振。由此可以判断,结构在 312 K ~ 314 K 之间处于临界颤振状态。为了能够更加显性地说明温度对结构刚度的影响,对 320 K 时的结构动力学特性进行分析,前四阶模态如图 9 所示。通过与结构温度 300 K 的情况对比可以看出,在温度场作用下,结构的各阶模态的振型基本不变,而频率均降低 10% 左右,如表 3 所示。

表 2 材料属性随温度变化

Tab. 2 Material property varies with temperature

温度/K	300	350
弹性模量/Pa	7.1×10^{10}	4.0×10^{10}

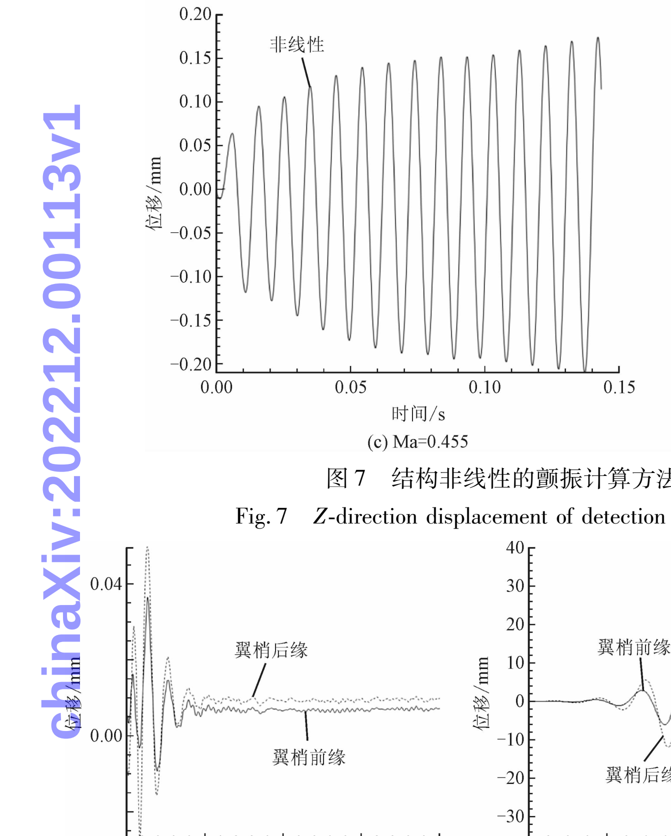
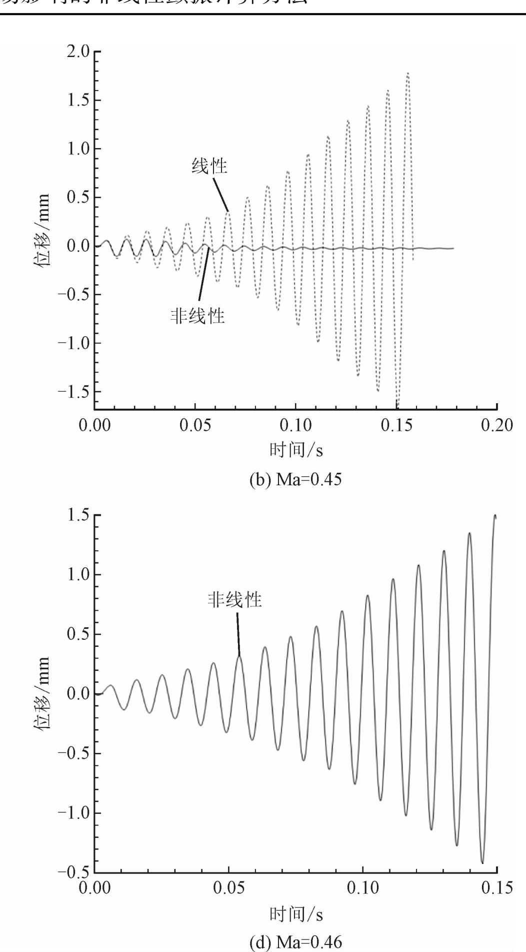



图 7　结构非线性的颤振计算方法得到的翼梢后缘 Z 方向位移曲线

Fig. 7　Z-direction displacement of detection point by CFD/nolinear CSD coupling analysis

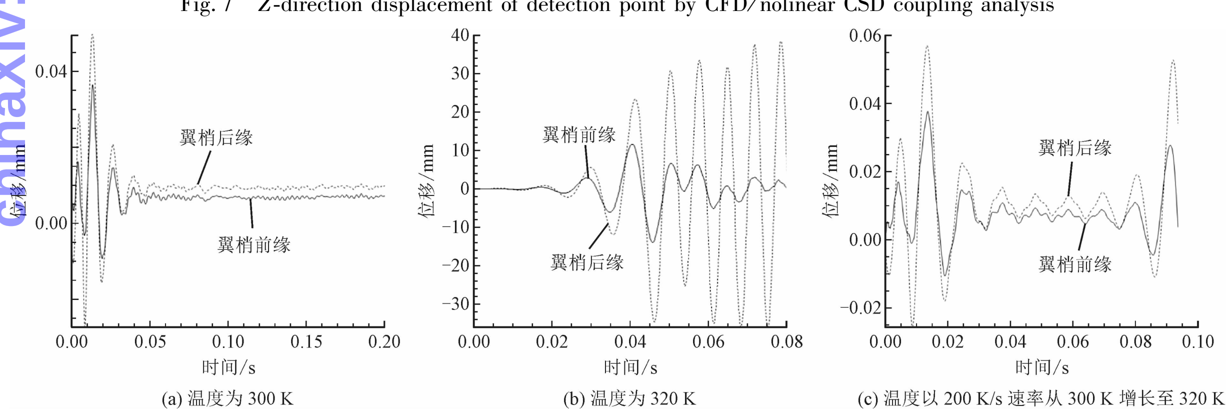


图 8　不同温度状态下监测点 Z 方向响应曲线

Fig. 8　Z-direction displacement of detection point in different temperature conditions

表 3　频率变化对比表

Tab. 3　Frequency comparison in different temperature

阶数	300 K 时结构频率/Hz	320 K 时结构频率/Hz	变化/%
1	40.8	36.9	9.56
2	243.2	219.8	9.62
3	278.0	251.3	9.60
4	694.4	627.6	9.62

图 10～12 给出了不同结构温度场某时刻的流线图及温度和压强分布图。通过对比图 10 和图 11 可以看出,由于采用了等温壁物面边界条件,结构温度的升高对流场温度场有一定影响,但是结构温度的变化对流场的温度场及压力场分布影响并不明显,温度场分布的变化主要是由结构较大幅度振动引起的。图 12 给出了结构温度为 320 K 时,某时刻截面流线图及截面处的压力分布,当在发生颤振时,

流场出现较大的分离流动。对比图 13 和图 14 可以看出,发生颤振的机翼表面出现大面积的负压区,属于典型的单阶模态失速颤振。

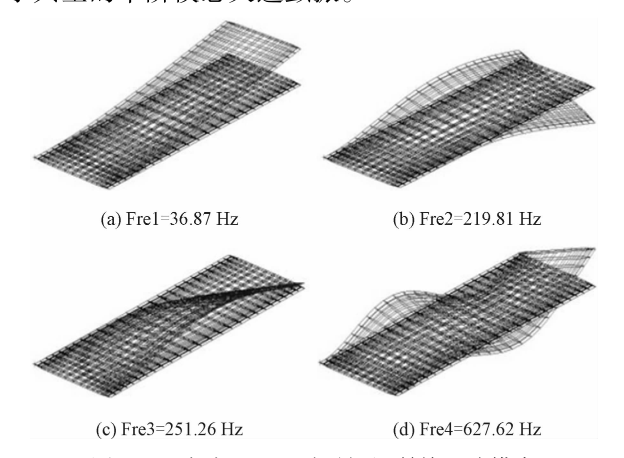


图 9　温度为 320 K 时平板机翼前四阶模态

Fig. 9　First four modes of the wing when temperature is 320 K

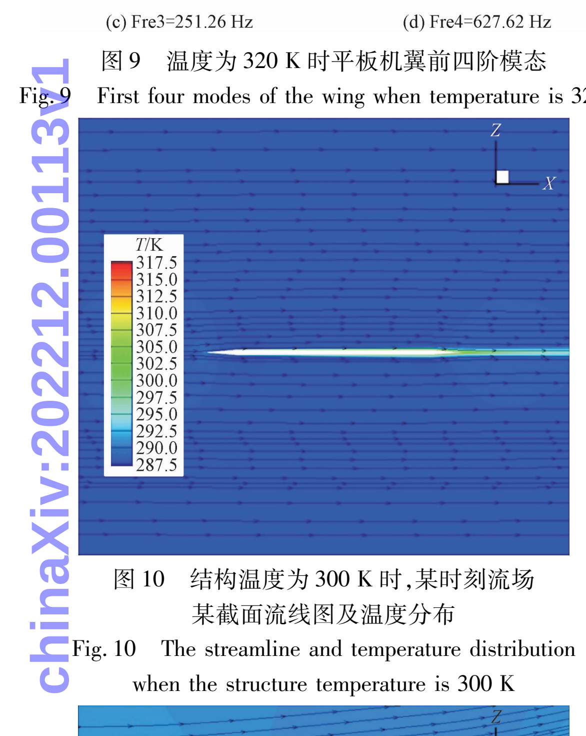


图 10　结构温度为 300 K 时,某时刻流场某截面流线图及温度分布

Fig. 10　The streamline and temperature distribution when the structure temperature is 300 K

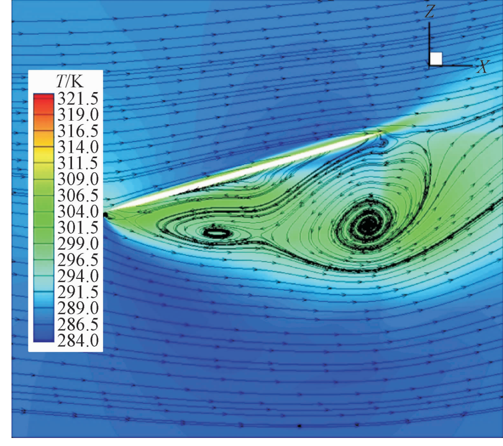


图 11　结构温度为 320 K 时,某时刻流场某截面流线图及温度分布

Fig. 11　The streamline and temperature distribution when the structure temperature is 320 K

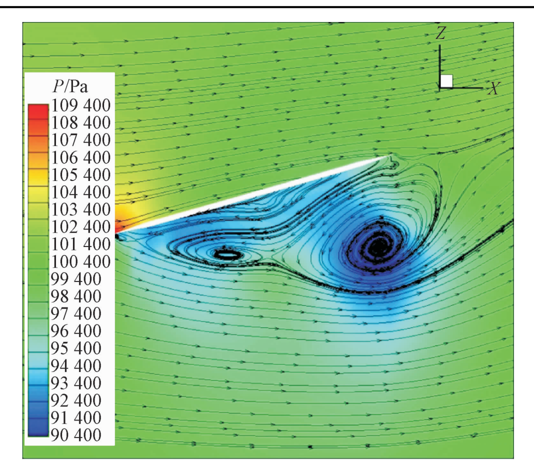


图 12　结构温度为 320 K 时,某时刻流场某截面流线图及压力分布

Fig. 12　The streamline and pressure distribution when the structure temperature is 320 K

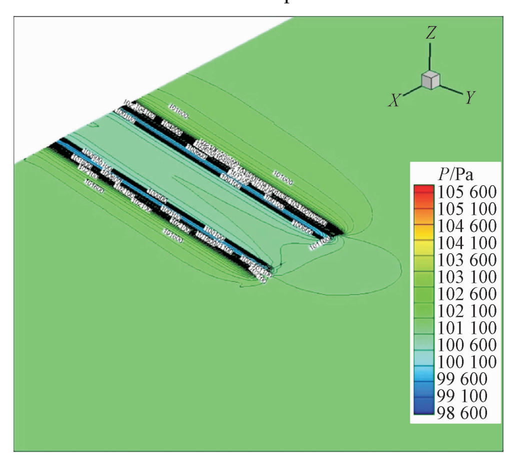


图 13　结构温度为 300 K 时,某时刻机翼表面及附近压力分布

Fig. 13　The pressure distribution when the structure temperature is 300 K

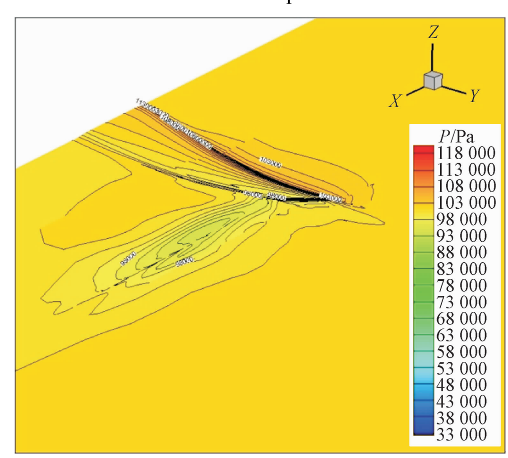


图 14　结构温度为 320 K 时,某时刻机翼表面及附近压力分布

Fig. 14　The pressure distribution when the structure temperature is 320 K

5 结　论

本研究针对颤振问题建立了 CFD/CSD 耦合的结构线性和非线性颤振计算方法。以平板机翼模型验证了方法的可靠性。进一步采用所建立的结构非线性颤振计算方法对时变温度影响下的颤振特性进行分析,研究了材料非线性对颤振特性的影响。得出以下结论。

1)采用结构线性和非线性的颤振计算方法得到的平板机翼颤振速度差别并不明显,这与平板机翼结构不存在非线性环节的客观物理相符。本研究建立的颤振计算方法可以用于颤振预测。

2)温度通过影响材料弹性模量对机翼刚度产生影响。变温条件下,当温度较低时,位移曲线处于收敛状态;随着温度升高,位移曲线振幅明显增加,结构发生颤振。结构温度的变化对流场的温度场及压力场分布影响并不明显,温度场分布的变化主要是由结构较大幅度振动引起的。

参考文献:

[1] PATIL M J,HODGES D H. On the importance of aerodynamic and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic behavior of high-aspect-ratio wings[J]. Journal of fluids & structures,2004,19(7):905-915.

[2] KAMAKOTI R,SHYY W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications[J]. Progress in aerospace sciences,2004,40(8):535-558.

[3] SCHUSTER D M,LIU D D,HUTTSELL L J. Computational aeroelasticity:Success, progress, challenge [J]. Journal of aircraft,2003,40(5):843-843.

[4] 刘南,白俊强,刘艳,等. 基于谐波平衡法和 V-g 法的高效颤振预测分析[J]. 空气动力学学报,2016,34(5):631-737.
LIU Nan,BAI Junqiang,LIU Yan,et al. Efficient flutter prediction based on harmonic balance and V-g methods[J]. ACTA aerodynamica Sinica,2016,34(5):631-737(in Chinese).

[5] 安效民,徐敏,陈士橹. 二阶时间精度的 CFD/CSD 耦合算法研究[J]. 空气动力学学报,2009,27(5):547-552.
AN Xiaomin,XU Min,CHEN Shilu. Analysis for second order time accurate CFD/CSD coupled algorithms[J]. ACTA aerodynamica Sinica,2009,27(5):547-552 (in Chinese).

[6] 叶正寅,王刚,杨永年,等. 利用 N-S 方程模拟机翼气动弹性的一种计算方法[J]. 计算物理,2001,18(5):397-401.
YE Zhengyin,WANG Gang,YANG Yongnian,et al. A method to simulate the aeroelastic problem based on Navier-Stokes equations [J]. Chinese journal of computational physics,2001,18(5):397-401(in Chinese).

[7] 陆志良,郭同庆,管德. 跨音速颤振计算方法研究[J]. 航空学报,2004,25(3):214-217.
LU Zhiliang,GUO Tongqing,GUAN De. A study of calculation method for transonic flutter[J]. ACTA aeronautica et as tronautica Sinica,2004,25(3):214-217 (in Chinese).

[8] 张苏华,赵永辉. 基于 CFD-CSD 耦合的机翼跨音速颤振计算[J]. 计算机应用与软件,2012,29(12):39-42.
ZHANG Suhua,ZHAO Yonghui. Predicting transonic flutter of wing using CFD-CSD coupling method[J]. Computer applications and software,2012,29(12):39-42(in Chinese).

[9] 仲继泽,徐自力. 基于动网格降阶算法的机翼颤振边界预测[J]. 振动与冲击,2017,36(4):185-191.
ZHONG Jize,XU Zili. Wing flutter prediction using a reduced dynamic mesh method[J]. Journal of vibration and shock,2017,36(4):185-191 (in Chinese).

[10] 侯良学,张戈,刘南,等. 基于风洞试验模型的跨声速颤振研究[J]. 振动与冲击,2019,38(13):236-241.
HOU Liangxue,ZHANG Ge,LIU Nan,et al. Transonic flutter based on wind tunnel test model[J]. Journal of vibration and shock,2019,38(13):236-241 (in Chinese).

[11] 钮耀斌,王中伟. 高速小展弦比机翼颤振的微分求积法分析[J]. 计算力学学报,2012,29(6):835-840.
NIU Yaobin,WANG Zhongwei. Flutter analysis of low-aspect-ratio wing by differential quadrature method[J]. Chinese journal of computational mechanics,2012,29(6):835-840 (in Chinese).

[12] 夏健,刘锋. 基于聚合多重网格方法的跨音速颤振的数值模拟[J]. 计算力学学报,2005,22(1):95-99.
XIA Jian,LIU Feng. Numerical simulation of transonic flutter based on agglomeration multigrid method[J]. Chinese journal of computational mechanics,2005,22(1):95-99(in Chinese).

[13] 赵永辉. 气动弹性力学与控制[M]. 北京:科学出版社,2007.

（编辑　张璐）